Β΄ ΤΑΞΗ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Α. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $\frac{2x}{x+1}+\frac{1}{x}=x+1$
2. $\sqrt{x+9}=x-3$
3. $\frac{4x}{2-x}-\sqrt{\frac{2-x}{x}}=3$
4. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$
5. $\sqrt{5+2\sqrt{x}}=\sqrt{2x+1}$
6. $\frac{x+1}{\sqrt{x}+7}=x-8$
7. $\frac{x-2}{x-1}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2-x}$
8. $\sqrt{x^3+8}=x+2$

Β. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $x+\frac{3}{x-1}\leq\frac{5x+1}{x^2-1}$
2. $x^2-\frac{1}{2x^2-x}\leq\frac{2}{1-2x}$
3. $\sqrt{x-3}<\sqrt{2x+1}$
4. $\sqrt{2x+5}\leq x+1$
5. $\left|\frac{2x}{x-6}\right|>1$
6. $\frac{\eta\mu x-2}{x^2-2x}<0$

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

3. Περιορισμοί: $x \neq 2$, $x \neq 0$ και $\frac{2-x}{x} > 0$ ή $(2-x)x > 0$.

Τελικά: $x \in (0,2)$.

Για τη λύση θέτουμε $\omega = \frac{2-x}{x}$ και έχουμε $\frac{4}{\omega} - \sqrt{\omega} = 3$ ή $\omega^3 - 9\omega^2 + 24\omega - 16 = 0$

Τελικά ω=1 (Η λύση ω=4 απορρίπτεται με αντικατάσταση)

Επομένως έχουμε $1 = \frac{2-x}{x}$, δηλαδή $x = 1$.

4. Περιορισμός: $x \neq 0$.

Για τη λύση θέτουμε $\omega = x + \frac{1}{x}$ και έχουμε $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0$ και ω=1 ή ω=2.

Επομένως έχουμε:

Α. $x + \frac{1}{x} = 1$ (αδύνατη)

Β. $x + \frac{1}{x} = 2$ και $x = 1$.

5. Περιορισμοί: $x \geq 0$ και $x \geq -\frac{1}{2}$, δηλαδή τελικά $x \geq 0$.

Υψώνουμε στο τετράγωνο και βρίσκουμε $\sqrt{x} = x - 2$ και με δεύτερη φορά $x^2 - 5x + 4 = 0$, οπότε x=1 (Η λύση x=4 απορρίπτεται με αντικατάσταση)

6. Περιορισμός: $x \geq 0$.

Για λιγότερες πράξεις θέτουμε $\sqrt{x} = \omega \geq 0$ και έχουμε $\omega^3 + 6\omega^2 - 8\omega - 57 = 0$. Παραγοντοποιούμε με Horner $(\rho = 3)$: $(\omega - 3)(\omega^2 + 9\omega + 19) = 0)$. Αφού απορρίψουμε τις ρίζες του τριωνύμου, βρίσκουμε $x = \omega^2 = 9$.